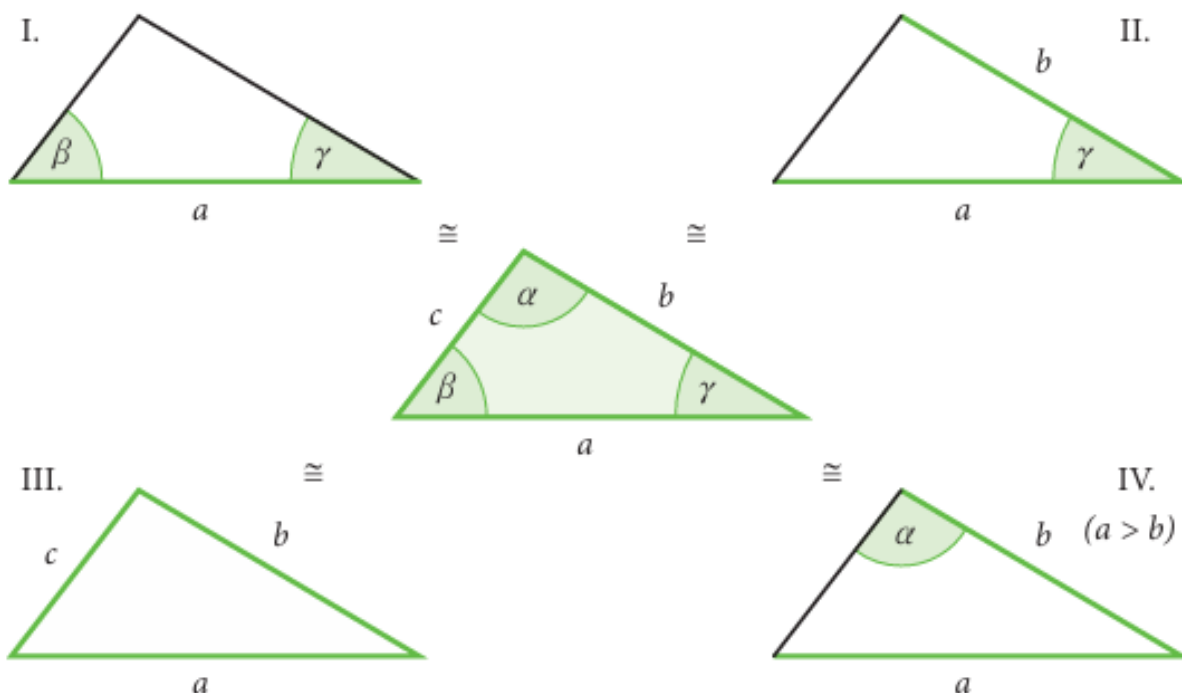


EGYBEVÁGÓ HÁROMSZÖGEK

Tétel: háromszögek egybevágóságának alapesetei:

- I. Ha két háromszögben egy-egy oldal és az ezeken fekvő két-két szög egyenlő, akkor a két háromszög egybevágó.
- II. Ha két háromszögben két-két oldal és az általuk közbezárt szög egyenlő, akkor a két háromszög egybevágó.
- III. Ha két háromszögben a három oldal páronként egyenlő, akkor a két háromszög egybevágó.
- IV. Ha két háromszögben két-két oldal és közülük a nagyobbikkal szemben fekvő szög egyenlő, akkor a két háromszög egybevágó.

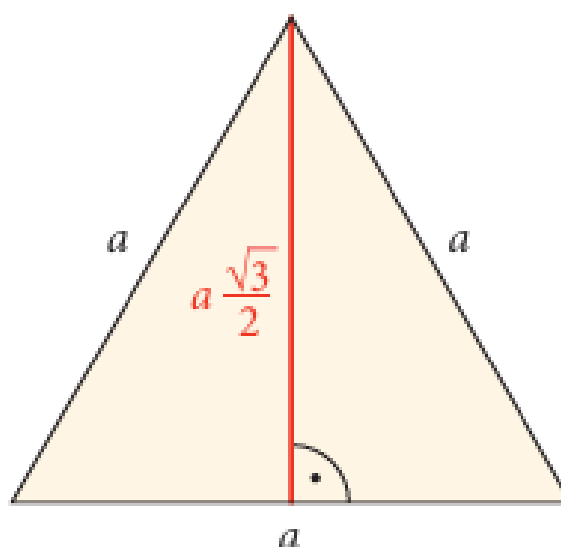
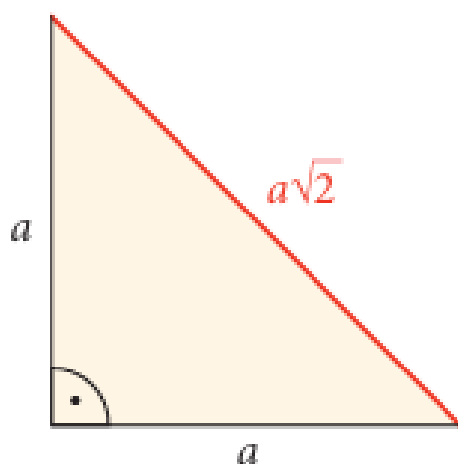
:



ELMÉLET

A Pitagorasz-tétel tárgyalásakor a 9. osztályban már megfigyeltük, hogy könnyen megjegyezhető kapcsolatok vannak egyes speciális háromszögekben lévő szakaszok között:

- az a befogójú, egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója $a\sqrt{2}$ hosszúságú;
- az a oldalú, szabályos háromszög magassága: $a\frac{\sqrt{3}}{2}$.



1. Egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója

Állítás: Az a befogójú, egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója $a\sqrt{2}$ hosszúságú.

Bizonyítás:

1. Mivel a háromszög egyenlő szárú és derékszögű, mindkét befogója a .
2. Írjuk fel a Pitagorasz-tételt:

$$a^2 + a^2 = c^2$$

3. Vonjuk össze az azonos tagokat:

$$2a^2 = c^2$$

4. Vonjunk négyzetgyököt mindkét oldalból:

$$\sqrt{2a^2} = c$$

$$a\sqrt{2} = c$$

2. Szabályos háromszög magassága

Állítás: Az a oldalú, szabályos háromszög magassága $a \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bizonyítás:

1. A szabályos háromszög magassága (m) merőleges az alapra, és felezi azt.
2. Így kapunk egy olyan derékszögű háromszöget, amelynek:
 - **Befogói:** a magasság (m) és az alap fele ($\frac{a}{2}$).
 - **Átfogója:** a háromszög oldala (a).
3. Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt:

$$m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

4. Fejezzük ki m^2 -et:

$$m^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$$

$$m^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$m^2 = \frac{3a^2}{4}$$

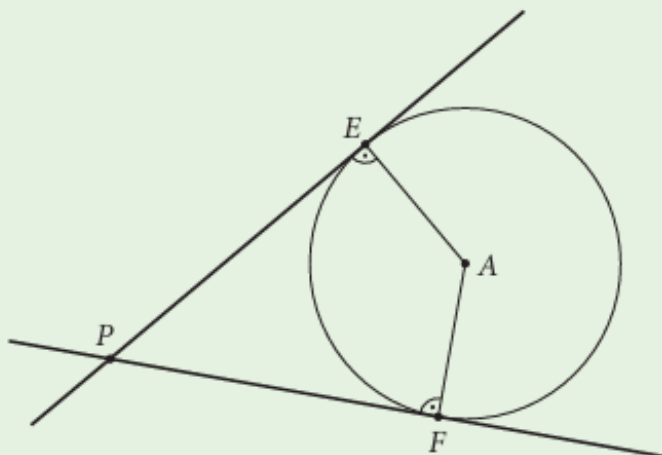
5. Vonjunk négyzetgyököt:

$$m = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$

$$m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

1 Egy körhöz egy külső P pontból meghúztuk a két érintőjét. Igazold, hogy az érintő szakaszok egyenlők! Melyik alapesetet használhatod az indokláshoz?

(Emlékeztetőül: érintő szakasznak hívjuk az érintőn a külső pontot az érintési ponttal összekötő szakaszt; az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra.)



Ez egy klasszikus geometriai bizonyítás! A feladat arra kér, hogy igazold: egy külső pontból (P) a körhöz húzott két érintőszakasz (PE és PF) hossza megegyezik.

Ehhez a **háromszögek egybevágóságát** fogjuk használni.

A bizonyítás lépései

Ahhoz, hogy lássuk az összefüggést, egészítsük ki az ábrát gondolatban: kössük össze a kör középpontját (A) a külső P ponttal! Ezzel két derékszögű háromszöget kapunk: $AEF\triangle$ és $AFP\triangle$.

1. **Közös oldal:** Az AP szakasz mindkét háromszögnek közös oldala (ez az átfogó).
2. **Egyenlő oldalak (sugarak):** Az AE és AF szakaszok a kör sugarai (r), tehát $AE = AF$.
3. **Derékszög:** Az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra, így mindkét háromszög derékszögű (90° van az E és F pontoknál).

Melyik alapesetet használhatjuk?

A két derékszögű háromszög egybevágó, mert megegyeznek:

- Az átfogójukban (AP).
- Egyik befogójukban ($AE = AF = r$).

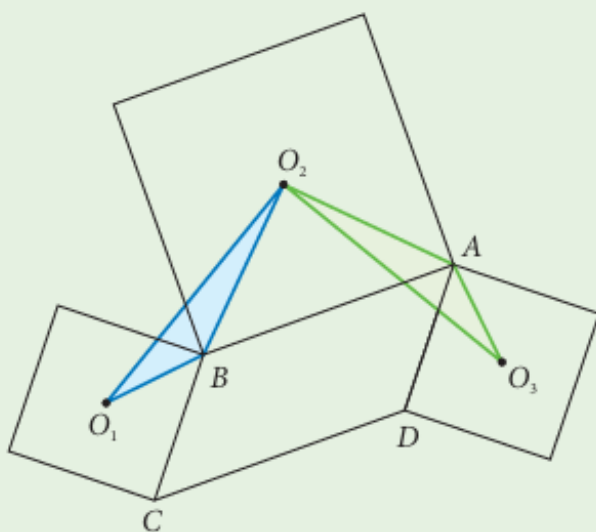
Ez a háromszögek egybevágóságának az az esete, amikor **két oldal és a nagyobbikkal szemközi szög megegyezik** (Szszoldal-szög-oldal speciális esete derékszögű háromszögekre).

Következtetés:

Mivel a két háromszög egybevágó ($AEF \triangle \cong AFP \triangle$), minden megfelelő oldaluk egyenlő. Ebből következik, hogy a harmadik oldaluk is ugyanakkora:

$$PE = PF$$

2 Az $ABCD$ paralelogramma három oldalára az ábra szerint egy-egy négyzetet állítottunk.



- a) Igazold, hogy $O_1BO_2 \triangle \cong O_3AO_2 \triangle$!
(O_1, O_2, O_3 egy-egy négyzet középpontja.)
- b) Igazold, hogy az $O_1O_2O_3 \triangle$ egyenlő szárú és derékszögű!

a) Igazold, hogy $O_1BO_2 \triangle \cong O_3AO_2 \triangle$!

A bizonyításhoz meg kell mutatnunk, hogy a két háromszög két oldala és a közbezárt szöge megegyezik.

- Első oldalpár:** Az O_1B és O_3A szakaszok. Az O_1 a BC oldalra emelt négyzet középpontja, az O_3 pedig az AD oldalra emelté. Mivel $ABCD$ paralelogramma, $BC = AD$. A négyzetek középpontja és a csúcs távolsága a négyzet oldalának $\frac{\sqrt{2}}{2}$ -szerese, tehát $O_1B = O_3A$.
- Második oldalpár:** Az O_2B és O_2A szakaszok. Mindkettő az AB oldalra emelt négyzet középpontját köti össze a négyzet csúcsaival. Egy négyzetben a középpont és a csúcsok távolsága egyenlő, így $O_2B = O_2A$.
- Közbezárt szög:** Jelöljük a paralelogramma B csúcsánál lévő belső szögét β -val, az A csúcsnál lévő pedig α -val. Tudjuk, hogy $\alpha + \beta = 180^\circ$.
 - Az O_1BO_2 szög: $45^\circ + \beta + 45^\circ = 90^\circ + \beta$.
 - Az O_3AO_2 szög: Itt a "külső" irányba nézünk. A teljes kör 360° . A háromszögon kívüli rész: $360^\circ - (45^\circ + \alpha + 45^\circ) = 270^\circ - \alpha$. Mivel $\alpha = 180^\circ - \beta$, ez behelyettesítve: $270^\circ - (180^\circ - \beta) = 90^\circ + \beta$.
- A szögek tehát megegyeznek.

Mivel két oldal és a közbezárt szög egyenlő, a két háromszög egybevágó: $O_1BO_2 \triangle \cong O_3AO_2 \triangle$.

b) Igazold, hogy az $O_1O_2O_3\triangle$ egyenlő szárú és derékszögű!

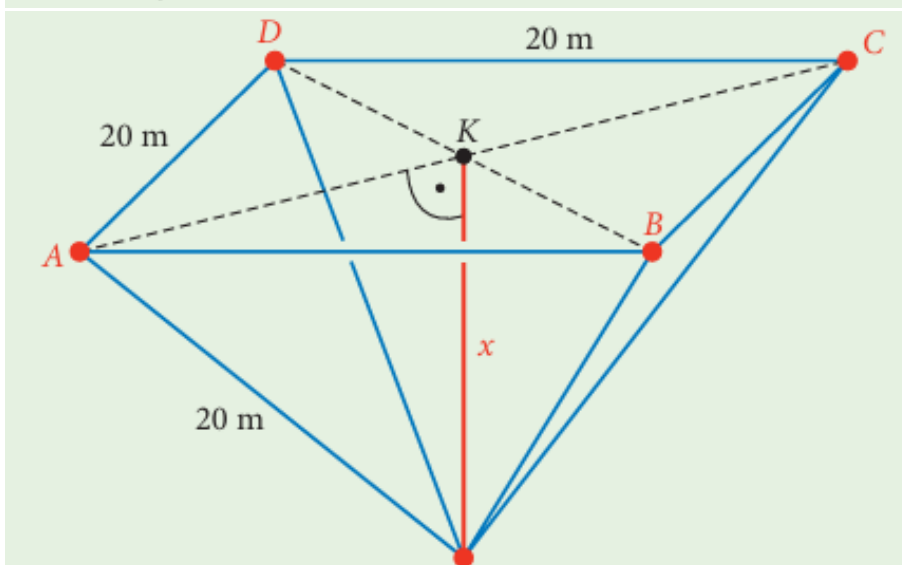
Ez az előző pont közvetlen következménye:

1. **Egyenlő szárú:** Mivel a két háromszög egybevágó, a harmadik oldalaik is egyenlőek:
 $O_1O_2 = O_2O_3$. Ez bizonyítja, hogy a háromszög egyenlő szárú.
2. **Derékszögű:** Nézzük meg az O_2 pont körüli elforgatást! Az egybevágóság miatt az $O_1BO_2\triangle$ -et elforgatva pontosan megkapjuk az $O_3AO_2\triangle$ -et. Mivel az O_2B és O_2A szakaszok a négyzet középpontjából a csúcsokba futnak, a köztük lévő szög 90° . Ez az elforgatás szöge is. Ha egy szakaszt (O_1O_2) 90° -kal elforgatunk a végpontja körül, az új szakasz (O_2O_3) merőleges lesz az eredetire.

Tehát az $O_1O_2O_3\triangle$ valóban egyenlő szárú és derékszögű.

3 Búvárok végeztek méréseket egy tóban. 4 piros bója jelezte a merülési területet. A bóják egy 20 m-es oldalú négyzet csúcsaiban helyezkedtek el.

- a) Az egyik búvár a négyzet K középpontjában függőlegesen merült le úgy, hogy ekkor az E pontban, az A jelű bójától 20 m volt a távolsága. Mit mutatott a búvár mélységmérője az E pontban? (a keresett távolságot az ábrán x -szel jelöltük)
- b) Milyen mértani testtel írhatjuk le ezt a problémát? Ennek mely alkotórészeit ismerjük? Melyik alkotórészét számítottuk ki?



a) A búvár mélységének (x) kiszámítása

A probléma megoldásához a **Pitagorasz-tételt** fogjuk használni két lépésben.

1. A négyzet átlójának fele (AK):

- A bóják egy 20 m oldalhosszúságú négyzetet alkotnak.
- A négyzet átlója (AC) a Pitagorasz-tétellel: $AC = \sqrt{20^2 + 20^2} = \sqrt{800} \approx 28,28$ m.
- Mivel K a négyzet középpontja, az AK távolság az átló fele: $AK = \frac{\sqrt{800}}{2} = \sqrt{200} \approx 14,14$ m.

2. A mélység (x) meghatározása:

- A bűvár függőlegesen merült le, így az AKE háromszög egy derékszögű háromszög, ahol a derékszög K -nál van.
- Ebben a háromszögben:
 - Az átfogó $AE = 20$ m.
 - Az egyik befogó $AK = \sqrt{200}$ m.
 - A másik befogó a keresett mélység, x (KE szakasz).
- Pitagorasz-tétellel: $x^2 + (\sqrt{200})^2 = 20^2$
- $x^2 + 200 = 400$
- $x^2 = 200$
- $x = \sqrt{200} \approx 14,14$ m.

A bűvár mélységmérője tehát kb. 14,14 métert mutatott.

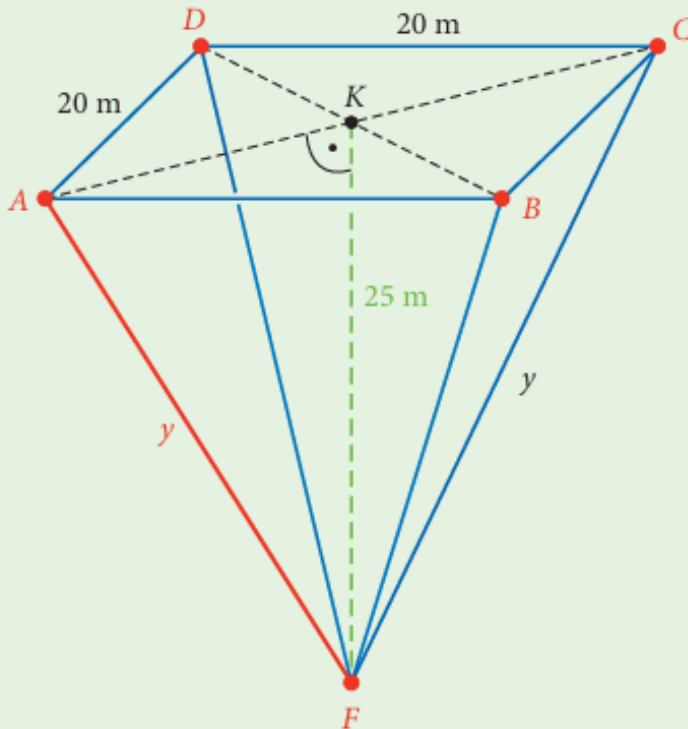
b) A mértani test leírása

Ezt a térbeli alakzatot egy **szabályos négyoldalú gúlával** írhatjuk le.

Az alkotórészek beazonosítása:

- **Ismert alkotórészek:**
 - Az alapél hossza ($a = 20$ m).
 - Az oldalél hossza ($b = 20$ m).
- **Kiszámított alkotórész:**
 - A gúla **testmagassága** (m vagy x), ami a csúcs (E) és az alaplap középpontja (K) közötti távolság.

- 4.** Egy másik bűvár is a K pontból indult, de ő 25 m mélyre merészkedett. Milyen távol volt az egyes bójáktól?



1. A vízszintes távolság (AK) meghatározása:

Ahogy az előző feladatnál is láttuk, a bóják egy 20 m oldalú négyzetet alkotnak. A négyzet középpontja (K) és bármelyik csúcsa (A, B, C vagy D) közötti távolság az átló fele:

- Az átló hossza: $\sqrt{20^2 + 20^2} = \sqrt{800} \approx 28,28$ m.
- Ennek a fele: $AK = \frac{\sqrt{800}}{2} = \sqrt{200} \approx 14,14$ m.

2. A bójától mért távolság (y) kiszámítása:

A bűvár függőlegesen merült le, így az AKF háromszög derékszögű, ahol a derékszög a K pontnál van.

- A háromszög egyik befogója a vízszintes távolság: $AK = \sqrt{200}$ m.
- A másik befogó a mélység: $KF = 25$ m.
- Az átfogó a keresett távolság: y .

A Pitagorasz-tétel felírása:

$$y^2 = 25^2 + (\sqrt{200})^2$$

$$y^2 = 625 + 200$$

$$y^2 = 825$$

$$y = \sqrt{825} \approx \mathbf{28,72 \text{ m}}$$

Válasz: A második búvár körülbelül **28,72 méter** távolságra volt az egyes bójáktól a merülési pontban.